数理解析研究所講究録 1218 巻 2001 年 1-7

頂点作用素代数入門

大阪大学大学院　理学研究科数学専攻　小川明彦 (Akihiko Ogawa)
Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043

この講演では、VOA に関係する概念の定義と知られている結果について発表する.

1 Vertex operator algebra (VOA)

Definition 1 *V が VOA とは、*

(i) $V=\oplus_{n\in\boldsymbol{Z}}V_n$ *s.t.* $\dim V_n<\infty$ $(\forall n\in\boldsymbol{Z})$, $V_n=0$ $(n\ll 0)$,

(ii)

$$\begin{array}{rcl} V & \to & (\mathrm{End}V)[[z,z^{-1}]] \quad : \boldsymbol{C}\text{-linear} \\ a & \mapsto & Y(a,z)=\sum_{n\in\boldsymbol{Z}}a_n z^{-n-1}, \end{array}$$

(iii) $\mathbf{1}\in V_0$: *vacuum*, $\omega\in V_2$: *Virasoro element,*

を持ち、$(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ は、以下の 6 個の公理を満たす。
$\forall a,b\in V$ に対し、

(V1) $a_n b=0$ $(n\gg 0)$,

(V2) $$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)Y(a,z_1)Y(b,z_2)-z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2-z_1}{-z_0}\right)Y(b,z_2)Y(a,z_1)$$
$$=z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right)Y(Y(a,z_0)b,z_2),$$

但し、$\delta(z)=\sum_{n\in\boldsymbol{Z}}z^n$ を δ-*function* とする。

(V3) $Y(\mathbf{1},z)=\mathrm{id}_V$, $Y(a,z)\mathbf{1}\in V[[z]]$, $\lim_{z\to 0}Y(a,z)\mathbf{1}=a$,

(V4) $Y(\omega,z)=\sum_{n\in\boldsymbol{Z}}L_n z^{-n-2}$ とおくと、

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+\frac{m^3-m}{12}c_V\delta_{m+n,0} \quad (m,n\in\boldsymbol{Z}),$$

但し、$c_V\in\boldsymbol{C}$ とする。c_V を *central charge* と呼ぶ。

(V5) $\forall a \in V_n$ に対し、$L_0 a = na$,

特に、$n = wt(a)$ と書く。

以下、$a \in V_n$ を *homogeneous* と呼ぶ。

(V6) $\frac{d}{dz}Y(a,z) = Y(L_{-1}a, z)$.

VOA で良く使われる公式 (commutator formula, skew-symmetry) を紹介する。

Proposition 1

(1) *commutator formula:*

$$[a_m, b_n] = \sum_{i \geq 0} \binom{m}{i} (a_i b)_{m+n-i} \quad (\forall a, b \in V, m, n \in \boldsymbol{Z}),$$

(2) *skew-symmetry:*

$$Y(a,z)b = e^{zL_{-1}} Y(b, -z)a \quad (\forall a, b \in V),$$

(3) $\forall m, n \in \boldsymbol{Z}$、$a \in V$: *homogeneous* に対し、

$$a_m V_n \subseteq V_{n+wt(a)-m-1}.$$

Proof.
(1) $\mathrm{Res}_{z_0=0, z_1=0, z_2=0} z_0^l z_1^m z_2^n$(Yacobi identity) で成分表示すると、

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{l}{i} (a_{l+m-i} b_{n+i} - (-1)^l b_{l+n-i} a_{m+i}) = \sum_{i \geq 0} \binom{m}{i} (a_i b)_{m+n-i}$$

となり、$l = 0$ とおくと得られる。

(2) Yacobi identity は $(a, b, z_0, z_1, z_2) \mapsto (b, a, -z_0, z_2, z_1)$ の変換で不変なので、次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
& z_2^{-1} \ \delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) Y(Y(a, z_0)b, z_2) \\
= \ & z_1^{-1} \ \delta\left(\frac{z_2 + z_0}{z_1}\right) Y(Y(b, -z_0)a, z_1) \\
= \ & z_1^{-1} \ \delta\left(\frac{z_2 + z_0}{z_1}\right) Y(Y(b, -z_0)a, z_2 + z_0) \\
= \ & z_2^{-1} \ \delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) Y(Y(b, -z_0)a, z_2 + z_0)
\end{aligned}$$

この両辺に Res_{z_1} を作用させると、

$$\begin{aligned} & Y(Y(a,z_0)b,z_2) \\ = \ & Y(Y(b,-z_0)a,z_2+z_0) \\ = \ & Y(e^{z_0L_{-1}}Y(b,-z_0)a,z_2+z_0) \end{aligned}$$

となり、injectivity を使うと得られる。

(3) commutator formula から、$b \in V_n$ に対し、

$$L_0a_mb = [L_0a_m]b + a_mL_0b = (wt(a)-m-1+n)a_mb$$

を得る。 □

2 Modules of VOA

(1) weak module
(2) admissible module
(3) (ordinary) module
を定義する。以下、V : VOA とする。

Definition 2 *M が weak V-module とは、*

(i) *M : vector space/$\boldsymbol{C}$,*

(ii)

$$\begin{aligned} V & \to (\mathrm{End}M)[[z,z^{-1}]] \quad : \boldsymbol{C}\text{-linear} \\ a & \mapsto Y_M(a,z) = \sum_{n\in\boldsymbol{Z}} a_n^M z^{-n-1}, \end{aligned}$$

を持ち、*(M,Y_M)* は、以下の 3 個の条件を満たす。
$\forall a,b \in V, u \in M,$ に対し、

(M1) $a_n^M u = 0 \ (n \gg 0)$,

(M2) $Y_M(\mathbf{1},z) = \mathrm{id}_M$,

(M3) $$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)Y_M(a,z_1)Y_M(b,z_2) - z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2-z_1}{-z_0}\right)Y_M(b,z_2)Y_M(a,z_1) = z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right)Y_M(Y(a,z_0)b,z_2).$$

Remark 1 *([DLM1])* $Y_M(\omega,z) = \sum_{n\in\boldsymbol{Z}} L_n z^{-n-2}$ とおくと、*weak V-module M* は *Virasoro relation* を満たす。

Proof. $u \in V$ に対し、

$$
\begin{aligned}
&Y_M(L(-1)u, z_2) \\
&= Y_M(u_{-2}\mathbf{1}, z_2) \\
&= \mathrm{Res}_{z_0} z_0^{-2} Y_M(Y(u, z_0)\mathbf{1}, z_2) \\
&= \mathrm{Res}_{z_0}\mathrm{Res}_{z_1} z_0^{-2}\left(z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y_M(u, z_1) Y_M(\mathbf{1}, z_2)\right. \\
&\left. - z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right) Y_M(\mathbf{1}, z_2) Y_M(u, z_1)\right) \\
&= \mathrm{Res}_{z_0}\mathrm{Res}_{z_1} z_0^{-2} z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) Y_M(u, z_1) \\
&= \mathrm{Res}_{z_0}\mathrm{Res}_{z_1} z_0^{-2} z_1^{-1}\delta\left(\frac{z_2 + z_0}{z_1}\right) Y_M(u, z_2 + z_0) \\
&= \mathrm{Res}_{z_0} z_0^{-2} Y_M(u, z_2 + z_0) \\
&= \mathrm{Res}_{z_0} z_0^{-2} e^{z_0 \frac{d}{dz_2}} Y_M(u, z_2) \\
&= \frac{d}{dz_2} Y_M(u, z_2)
\end{aligned}
$$

が成立するので、$Y(\omega, z_0)\omega$ を計算すれば、Virasoro relation が得られる。 □

Definition 3 M が *admissible* V*-module* とは、M は *weak* V*-module* であり、

(1) $M = \oplus_{n \in \boldsymbol{Z}_{\geq 0}} M_n$,

(2) $\forall m \in \boldsymbol{Z}, n \in \boldsymbol{Z}_{\geq 0}$, $a \in V$: *homogeneous* に対し、

$$a_m^M M_n \subseteq M_{n + wt(a) - m - 1}$$

をみたす。

Definition 4 M が *(ordinary)* V*-module* とは、M は *weak* V*-module* であり、

(1) $M = \oplus_{\lambda \in \boldsymbol{C}} M(\lambda)$, $M(\lambda) = \{u \in M \mid L_0 u = \lambda u\}$,

(2) $\dim M(\lambda) < \infty$ $(\forall \lambda \in \boldsymbol{C})$,
$\lambda \in \boldsymbol{C}$: *fix*, $n \ll 0$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ に対し、$M(\lambda + n) = 0$

をみたす。

Proposition 2 M が *(ordinary)* V*-module* ならば、M は *admissible* V*-module* である。

Proof.

$$I = \{\lambda \in \boldsymbol{C} \mid M(\lambda) \neq 0, M(\lambda + n) = 0 \quad \text{for } n \in \boldsymbol{Z}_{<0}\},$$

$M_n = \oplus_{\lambda \in I} M(\lambda + n)$ とおくと、$M = \oplus_{n \in \boldsymbol{Z}_{\geq 0}} M_n$ になる。 □

3 Zhu 代数

以下、VOA V に付属する結合代数である Zhu 代数 $A(V)$ を用いて、VOAの表現の性質に関する定理を述べる。
$a \in V$: homogeneous ,$b \in V$ に対し、

$$\begin{aligned} a * b &= \mathrm{Res}_z \frac{(1+z)^{wt(a)}}{z} Y(a,z)b, \\ a \circ b &= \mathrm{Res}_z \frac{(1+z)^{wt(a)}}{z^2} Y(a,z)b \end{aligned}$$

とする。([Z])
operations $*, \circ$ を V 上 linear に拡張する。
$O(V) = \mathrm{Span}_{\boldsymbol{C}}\{a \circ b \mid a, b \in V\}$, $A(V) = V/O(V)$ とおく。([Z])

vector space $O(V)$, $A(V)$ に対して、次の命題が成り立つ。

Proposition 3 *([Z])*

(1) $O(V)$: $*$に関して両側 *ideal,*

(2) $A(V)$: $*$に関して *associative algebra.*

Proof. [Z] の Theorem 2.1.1 を参照して下さい。 □

operation $*$ に関する結合代数 $A(V)$ を Zhu 代数と呼ぶ。

M : weak V-module に対して、

$$\Omega(M) = \{u \in M \mid a^M_{wt(a)+n} u = 0 \quad \text{for } n \in \boldsymbol{Z}_{\geq 0},\ a \in V\text{: homogeneous}\},$$

$o(a) = a^M_{wt(a)-1}$ ($a \in V$: homogeneous) とする。

$o : V \to \mathrm{End}_{\boldsymbol{C}} M$ へ linear に拡張する。

linear map o と $\Omega(M)$ に対して、以下の命題が成り立つ。

Proposition 4 *([Z],[DLM2])*

(1) $o(a)\Omega(M) \subset \Omega(M)$ $(\forall a \in V)$,

(2)

$$\begin{aligned} V &\to \mathrm{End}_{\boldsymbol{C}} \Omega(M) \\ a &\mapsto o(a)|_{\Omega(M)} \end{aligned}$$

は、$\Omega(M)$ 上に $A(V)$-*module*の構造を誘導する。

(3) M : *irreducible admissible* V*-module* に対し、以下が成り立つ。
(i) $\Omega(M) \cong M_0$ *as* $A(V)$*-module,*
(ii) $\Omega(M)$: *irreducible* $A(V)$*-module.*

Proof. [DLM2] Theorem 5.3, Proposition 5.4 を参照して下さい。 □

Theorem 1 *([Z], [DLM2])*
functor $\Omega : M \mapsto \Omega(M)$ は、*irreducible admissible* V*-module* の同値類と *irreducible* $A(V)$*-module* の同値類の間に 1 対 1 対応を与える。

Proof. [Z] Theorem 2.2.2 を参照して下さい。 □

4 Rational VOA

以下、VOA の中で最も重要な Rational VOA の簡単な性質について述べる。

Definition 5 *([DLM1])*
V が *rational VOA* とは、任意の *admissible* V*-module* は完全可約であると定義する。

Theorem 2 *([DLM2])*
V が *rational VOA* ならば、次が成り立つ。

(1) *irreducible admissible* V*-module* は有限個に限る。

(2) 全ての *irreducible admissible* V*-module* は *ordinary* V*-module* である。

Proof. [DLM2] の Theorem 8.1 を参照して下さい。 □

Theorem 3 *([Z])*
V が *rational VOA* ならば、*Zhu* 代数 $A(V)$ は 有限次元 *semisimple associative algebra* になる。

Proof. V-module M の top level M_0 が $A(V)$ であるような M が存在する。
V は rational だから、M は有限個の irreducible admissible V-module の直和で書ける。
従って、M_0 は有限個の $A(V)$-module の直和で書ける。
ゆえに、$A(V)$ は有限次元で、semisimple になる。 □

参考文献

[DLM1] C. Dong, H. Li and G. Mason: *Regularity of rational vertex operator algebras*, Advances. in Math. **132** (1997), 148-166.

[DLM2] Dong, Chongying; Li, Haisheng; Mason, Geoffrey *Twisted representations of vertex operator algebras and associative algebras*, Internat. Math. Res. Notices, no. 8 (1998), 389–397.

[Z] Y. Zhu, *Modular invariance of characters of vertex operator algebras*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 237-302.